UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN
Creada por Ley N° 29304
COMISIÓN ORGANIZADORA
"Año de la Esperanza y del Fortalecimiento de la Democracia"

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

RESOLUCIÓN DE COMISIÓN ORGANIZADORA N° 398-2026-CCO-UNJ

Jaén, 25 junio de 2026

VISTO:
El Oficio N° 310-2026-VPI-CO-UNJ, de fecha 13 de marzo de 2026; el Informe N° 234-2026-UNJ/OPP, de fecha 16 de marzo de 2026; la Carta N° 021-2026-UNJ/VPI-DIITT, de fecha 18 de marzo de 2026; la Carta N° 008-2026/DACBYA-UNJ/JDCS, de fecha 11 de junio de 2026; el Oficio N° 011-2026-UNJ/VPI-DIITT, de fecha 12 de junio de 2026; el Informe N° 106-2026-UNJ/VPI, de fecha 24 de junio de 2026; el Acuerdo N° 0492-2026-SO-CCO-UNJ, adoptado en Sesión Ordinaria N° 024-2026-SO-CCO-UNJ, de fecha 24 de junio de 2026, y;

CONSIDERANDO:
Que, conforme al cuarto párrafo del Artículo 18° de la Constitución Política del Estado, concordante con el Artículo 8° de la Ley N° 30220, Ley Universitaria, así como con el Artículo 6° del Estatuto de la Universidad Nacional de Jaén, el Estado reconoce la autonomía Universitaria en su régimen normativo, de gobierno, académico, investigación, administrativo y económico;

Que, el Artículo 29° de la Ley N° 30220, Ley Universitaria, establece que: "*La Comisión Organizadora tiene a su cargo la aprobación del estatuto, reglamentos y documentos de gestión académica y administrativa de la universidad, formulados en los instrumentos de planeamiento, así como su conducción y dirección hasta que se constituyan los órganos de gobierno, de acuerdo a la citada Ley*";

Que, el numeral 5.2 de la Resolución Viceministerial N° 244-2021-MINEDU, de fecha 27 de julio de 2021, modificado por Resolución Viceministerial N° 055-2022-MINEDU, y la Resolución Viceministerial N° 053-2023-MINEDU, establece que, la comisión Organizadora tiene a su cargo la aprobación del estatuto, reglamentos y documentos de gestión académica y administrativa de la universidad, formulados en los instrumentos de planeamiento; así como, la conducción y dirección de la universidad hasta la constitución de los órganos de gobierno;

Que, el Sr. Presidente de la Comisión Organizadora de la Universidad Nacional de Jaén, es el personero y representante legal de la Universidad conforme a lo dispuesto por la Ley Universitaria N° 30220, tiene a su cargo y dedicación exclusiva la dirección, conducción y gestión del gobierno universitario en todos sus ámbitos;

Que, con Resolución de Comisión Organizadora N° 386-2026-CCO-UNJ, de fecha 18 de junio de 2026, se encargó el Despacho de la Presidencia de la Comisión Organizadora al Vicepresidente Académico, Dr. Braulio Morán Ávila, los días 25 y 26 de junio de 2026, en adición a sus funciones, con motivo de la comisión de servicios autorizada al Presidente de la Comisión Organizadora;

Que, mediante Ley N° 27658, Ley Marco de la Modernización de la Gestión del Estado, se faculta a las entidades, a regular sus procesos para la obtención de mayores niveles de eficiencia a fin de brindar una mejor atención a la ciudadanía, priorizando y optimizando el uso de recursos públicos;

Que, con la Resolución N° 115-2021-CO-UNJ, de fecha 29 de abril de 2021, se aprueba el Reglamento General del Fondo Editorial de la Universidad Nacional de Jaén;

Que, a través del Artículo 1° del Reglamento General del Fondo Editorial de la Universidad Nacional de Jaén, señala que: "*La Universidad Nacional de Jaén (UNJ), dentro de sus funciones considera la publicación y la promoción de las obras escritas o digitales, como resultado de la producción intelectual de investigadores en las diversas áreas del conocimiento. priorizando los productos que por su calidad científica y su carácter humanista representen un apoyo a la actividad docente, estudiantil y contribuyan a la solución de los problemas del país*".

Que, en el Artículo 2°, del Reglamento General del Fondo Editorial de la Universidad Nacional de Jaén, establece que: "*El Fondo Editorial es responsable de garantizar la calidad de las publicaciones de manera integral y permitir un fácil acceso al público*".

Asimismo, en el Artículo 15°, del mismo cuerpo normativo, se señala que: *"Los aspectos no previstos en el presente reglamento serán resueltos por la Dirección de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica, en coordinación con la Vicepresidencia de Investigación de la UNJ";*

Que, mediante la Resolución N° 256-2023-CO-UNJ, de fecha 08 de junio de 2023, se resuelve aprobar el Reglamento de Originalidad y/o Grado de Similitud de los Trabajos de Investigación con Software Antiplagio de la Universidad Nacional de Jaén;

Que, de igual forma, mediante literal 1.1 del numeral 1 del Artículo IV del Título Preliminar del Texto Único Ordenado de la Ley N° 27444, referente al Principio de Legalidad, establece que: *"Las autoridades administrativas deben actuar con respeto a la Constitución, a la Ley y al derecho, dentro de las facultades que le estén atribuidas y de acuerdo con los fines para los que les fueron conferidas";*

Que, mediante numeral 62.3 del Artículo 62° del mismo cuerpo normativo señala: *"Cada Entidad es competente para realizar tareas materiales necesarias para el eficiente cumplimiento de su misión y objetivos";*

Que, mediante Resolución N° 490-2023-CO-UNJ, de fecha 18 de setiembre del 2023, la Comisión Organizadora de la Universidad Nacional de Jaén aprueba la Directiva N°002-2023-UNJ, Directiva que establece las normas para la Formulación, Aprobación y Actualización de Documentos Internos de la Universidad Nacional de Jaén;

Que, el numeral 2.1, del ítem 2 de la Directiva N° 002-2023-UNJ: Directiva que establece las normas para la Formulación, Aprobación y Actualización de Documentos Internos de la Universidad Nacional de Jaén, dispone que: *"Los órganos y unidades orgánicas de la UNJ al formular los documentos normativos deberán tener en cuenta la Estructura y Contenido establecido en el Anexo N° 01-05 de la presente Directiva". Asimismo, mediante ítem 3, se establece que: "3.1. Corresponde a la Oficina de Planeamiento y Presupuesto, revisar, analizar y emitir opinión técnica, sobre el proyecto de documento normativo a solicitud del órgano proponente, 3.2. La Oficina de Asesoría Jurídica, revisa el proyecto de documento normativo en el marco legal que sustenta dicho documento. De encontrarlo conforme, lo visa y remite para su aprobación a la Comisión Organizadora (…), 3.5. La Comisión Organizadora revisa el proyecto de documento normativo, si hay conformidad la aprueba y deriva al Secretario General para proyectar la resolución correspondiente. De no estar conforme la deriva al órgano correspondiente para su reformulación o archivo";*

Que, a través del Oficio N° 310-2026-VPI-CO-UNJ, de fecha 13 de marzo de 2026, la Vicepresidencia de Investigación, remitió al Presidente de la Comisión Organizadora el Manual denominado "Derivadas y sus Aplicaciones", cuya autoría corresponde a la Dra. Rosario Yaqueliny Llauce Santamaría, al Dr. Juan Carlos Damián Sandoval y al Dr. Leonardo Damián Sandoval, para su evaluación y eventual aprobación mediante el acto resolutivo correspondiente;

Que, mediante Informe N° 234-2026-UNJ/OPP, de fecha 16 de marzo de 2026, el Jefe de la Oficina de Planeamiento y Presupuesto emitió evaluación respecto de la propuesta de aprobación del Manual denominado "Derivadas y sus Aplicaciones", formulando observaciones al referido documento; en consecuencia, dispuso la devolución del expediente a la Dirección de Investigación Innovación y Transferencia Tecnológica de la Universidad Nacional de Jaén, a fin de que, a través del Departamento Académico de Ciencias Básicas y Aplicadas, se proceda a subsanar las observaciones advertidas y adecuar la presentación del documento a las disposiciones establecidas en la Directiva N° 002-2023-UNJ, Directiva que establece las normas para la Formulación, Aprobación y Actualización de Documentos Internos de la Universidad Nacional de Jaén, relacionada con la elaboración, aprobación y publicación de materiales académicos y de investigación de la Universidad Nacional de Jaén;

Que, a través de la Carta N° 021-2026-UNJ/VPI-DIITT, de fecha 18 de marzo de 2026, la Dirección de Investigación Innovación y Transferencia Tecnológica devuelve el expediente del Manual denominado "Derivadas y sus Aplicaciones", al Dr. Juan Carlos Damián Sandoval, docente adscrito al Departamento Académico de Ciencias Básicas y Aplicadas, a fin de que se subsanen las observaciones advertidas a través del Informe N° 234-2026-UNJ/OPP;

Que, mediante Carta N° 008-2026/DACBYA-UNJ/JDCS, de fecha 11 de junio de 2026, el Dr. Juan Carlos Damián Sandoval remitió a la Dirección de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica el Manual denominado "Derivadas y sus Aplicaciones", debidamente subsanado; en mérito a ello, mediante Oficio N° 011-2026-UNJ/VPI-DIITT, de fecha 12 de junio de 2026, el Director de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica remitió dicho manual al Vicepresidente de Investigación para la continuación del trámite correspondiente;

Que, a través del Informe N° 106-2026-UNJ/VPI, de fecha 24 de junio de 2026, el Vicepresidente de Investigación remite Opinión Técnica favorable para la aprobación del Manual denominado "Derivadas y sus Aplicaciones", concluyendo:

> *"Se concluye que el manual académico: Derivadas y sus aplicaciones, ha cumplido con el procedimiento establecido en las normativas señaladas en la base legal.*
> *Elevar el presente informe a la Presidencia de la Comisión Organizadora, a fin de que sea sometido a consideración en sesión ordinaria para la aprobación mediante acto resolutivo.*
> *Se recomienda que las resoluciones de aprobación sean notificadas oportunamente a la Vicepresidencia de Investigación, así como a la Dirección de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica, a fin de consolidar y mantener actualizada una base de datos institucional que permita el adecuado registro, seguimiento y gestión de las actividades de investigación desarrolladas en la universidad"*

Que, el pleno de la Comisión Organizadora de la Universidad Nacional de Jaén, en Sesión Ordinaria N° 24-2026-SO-CCO-UNJ, de fecha 24 de junio de 2026, adoptó por unanimidad el Acuerdo N° 0492-2026-SO-CCO-UNJ, mediante el cual se acordó: **APROBAR** el Manual Académico: "DERIVADAS Y SUS APLICACIONES", el mismo que en anexo forma parte integrante del presente acuerdo, según el tenor de la parte resolutiva; **DISPONER** que el Departamento Académico de Ciencias Básicas y Aplicadas promueva la utilización del Manual Académico: "Derivadas y sus aplicaciones", como material de apoyo para el desarrollo de las actividades académicas, conforme a sus competencias; **ENCARGAR** a la Oficina de Comunicación e Imagen Institucional y la Oficina de Tecnología de la Información la difusión del citado Manual a través de los medios institucionales correspondientes, a fin de garantizar su conocimiento y adecuada aplicación por parte de las dependencias de la Universidad y **NOTIFICAR**, el presente acuerdo a los interesados y las instancias correspondientes para su conocimiento y fines.

En uso de las facultades y atribuciones conferidas por el Artículo 18°, de la Constitución Política del Perú, la Ley N° 30220-Ley Universitaria: "Disposiciones para la Constitución y Funcionamiento de las Comisiones Organizadoras de las Universidades Públicas en Proceso de Constitución", aprobada mediante Resolución Viceministerial N° 244-2021-MINEDU, modificada con Resolución Viceministerial N° 055-2022-MINEDU y Resolución Viceministerial N° 053-2023-MINEDU, el Estatuto de la Universidad Nacional de Jaén, aprobado mediante Resolución N° 304-2020-CO-UNJ, de fecha 29 de setiembre de 2020, y; conforme a las atribuciones conferidas mediante Resolución Viceministerial N° 098-2026-MINEDU, de fecha 28 de mayo de 2026;

SE RESUELVE:

ARTÍCULO PRIMERO.- APROBAR el Manual Académico: **"DERIVADAS Y SUS APLICACIONES"**, el mismo que en anexo forma parte integrante del presente acuerdo, según el siguiente cuadro resumen:

DOCUMENTO ACADÉMICO	TÍTULO	ORIGINALIDAD Y/O GRADO DE SIMILITUD	DOCENTES AUTORES
Manual Académico	Derivadas y sus aplicaciones	4%	Dr. Juan Carlos Damián Sandoval Dra. Rosario Yaqueliny Llauce Santamaría Dr. Leonardo Damián Sandoval

ARTÍCULO SEGUNDO.- DISPONER que el Departamento Académico de Ciencias Básicas y Aplicadas promueva la utilización del Manual Académico: "Derivadas y sus aplicaciones", como material de apoyo para el desarrollo de las actividades académicas, conforme a sus competencias.

ARTÍCULO TERCERO.- ENCARGAR a la Oficina de Comunicación e Imagen Institucional y la Oficina de Tecnología de la Información la difusión del citado Manual a través de los medios institucionales correspondientes, a fin de garantizar su conocimiento y adecuada aplicación por parte de las dependencias de la Universidad.

ARTÍCULO CUARTO.- NOTIFICAR la presente Resolución a las instancias correspondientes, para su conocimiento y fines pertinentes.

ARTÍCULO QUINTO.- DISPONER la publicación en el Portal Web Institucional de la Universidad Nacional de Jaén www.unj.edu.pe.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y CÚMPLASE;

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN
Mg. Eveling Tatiana Noriega Trujillo
SECRETARIA GENERAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN
COMISIÓN ORGANIZADORA
Dr. Braulio Morán Ávila
PRESIDENTE (e)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

MANUAL ACADÉMICO: DERIVADAS Y SUS APLICACIONES

Autores:

Dr. Juan Carlos Damián Sandoval

Dra. Rosario Yaqueliny Llauce Santamaría

Dr. Leonardo Damián Sandoval

Jaén – Perú, junio 2026

Índice

1. Finalidad

En el presente manual tiene como finalidad desarrollar en los estudiantes la comprensión y el uso de las derivadas como una herramienta esencial del cálculo diferencial para analizar fenómenos de cambio y variación presentes en diferentes contextos científicos, tecnológicos y cotidianos. Asimismo, busca fortalecer el razonamiento matemático y la capacidad para interpretar situaciones reales mediante modelos que permitan tomar decisiones fundamentadas y resolver problemas de manera eficiente.

2. Objetivos

- **Objetivo General**
  Comprender y aplicar el concepto de derivada y sus principales propiedades para resolver problemas relacionados con tasas de cambio, optimización y análisis del comportamiento de funciones en diversos contextos.

- **Objetivo Especifico**
  - Identificar el significado matemático y geométrico de la derivada dentro del estudio del cálculo diferencial.
  - Aplicar las reglas de derivación en funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
  - Interpretar la derivada como razón de cambio instantánea y pendiente de una recta tangente
  - Resolver problemas de máximos y mínimos empleando técnicas de optimización.
  - Utilizar las derivadas para analizar crecimiento, decrecimiento, concavidad y puntos críticos de una función.
  - Relacionar el uso de las derivadas con situaciones propias de diferentes áreas profesionales.

3. Base Legal

La enseñanza y desarrollo del tema de derivadas y sus aplicaciones se sustenta en los principios y lineamientos normativos que orientan la educación superior y el fortalecimiento de competencias profesionales, considerando el desarrollo del pensamiento crítico, la investigación y la resolución de problemas. Entre los principales fundamentos normativos y pedagógicos se consideran:

- La legislación educativa vigente orientada al fortalecimiento de competencias científicas y matemáticas en la formación superior.
- Los lineamientos curriculares institucionales relacionados con el desarrollo de capacidades analíticas y de razonamiento lógico.
- Los planes de estudio universitarios que incorporan el cálculo diferencial como parte de la formación básica y profesional.
- Los enfoques pedagógicos centrados en el aprendizaje por competencias y la aplicación del conocimiento en contextos reales.
- Los criterios académicos orientados a promover la investigación, innovación y solución de problemas interdisciplinarios.

4. Ambito de Aplicaciones

Las derivadas poseen un amplio campo de aplicación debido a su capacidad para estudiar procesos de cambio. Entre los principales ámbitos se encuentran:

Ingeniería: análisis de procesos, diseño estructural, optimización de recursos y control de sistemas dinámicos.

Economía y finanzas: estudio de costos marginales, ingresos, utilidad máxima y comportamiento de mercados.

Física: análisis del movimiento, velocidad instantánea, aceleración y variaciones de magnitudes físicas.

Medicina y ciencias biológicas: modelación del crecimiento poblacional, propagación de enfermedades y análisis fisiológico.

Administración y gestión: evaluación de tendencias, optimización de procesos y análisis de productividad.

Tecnología e informática: desarrollo de algoritmos, aprendizaje automático y modelado computacional.

Arquitectura y diseño: estudio de curvas, estructuras y optimización geométrica de proyectos.

Investigación científica: modelación matemática y análisis de fenómenos experimentales.

5. Introducción

A lo largo del desarrollo histórico de las matemáticas, numerosos conceptos fundamentales del cálculo diferencial surgieron a partir de una interrogante central estudiada desde la antigüedad. Entre los siglos III y II a.C., los matemáticos griegos mostraron especial interés por determinar la línea que toca una curva en un único punto sin interceptarla localmente, lo que hoy se conoce como recta tangente. En las primeras etapas de la evolución matemática, este desafío fue abordado mediante procedimientos particulares aplicados a diversos casos específicos, permitiendo obtener soluciones en múltiples situaciones aisladas. Por ejemplo, es bastante fácil resolver el problema si la curva es un círculo, y todo estudiante ha visto esta solución en su geometría de secundaria. Sin embargo, no fue si no hasta el tiempo de Isacc Newton(1642 - 1727) y de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) que se dio un método general sistemático para obtener la solución. En este sentido se acredita a estos dos hombres la invención del cálculo. (Hernández, 2016, p. 97)
El cálculo juega un rol importante cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y las variaciones que se producen. El cálculo tiene reconocida su importancia porque permite encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos. En particular, la derivada permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. (Vrancken y Engler, 2014, p.450)
El presente manual pretende motivar al estudiante asimilar los conocimientos de derivación de funciones algebraicas, cómo suma, resta, producto y cociente de dos funciones, la cual desarrolla las habilidades y destreza que le permita plantear y resolver problemas relacionados a la ingeniería.

6. Desarrollo

6.1. Derivación de funciones algebraicas

En lugar de aplicar en cada problema de derivación la definición de derivada, es preferible deducir un conjunto de reglas generales que permitan hallar las derivadas de una gran cantidad de funciones. Por ejemplo, si f y g son funciones derivadas, entonces hallaremos mediante estas reglas la derivada de otras funciones como $f + g$; $f - g$;$f.g$ y f/g, etc.

TEOREMA 1. *Dadas las siguientes funciones:*

1. *Sea c es una constante, si $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$, $\forall x \in R$*
2. *Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$, $\forall x \in R$*
3. *Sea $n \in N$, si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall x \in R$*

EJEMPLO 1. Dadas las siguientes funciones:

1. Si $f(x) = 5$, entonces $f'(x) = 0$, $\forall x \in R$
2. Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, $\forall x \in R$
3. Si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) = 5x^4$, $\forall x \in R$

TEOREMA 2. *Sea c una constante, f y g funciones derivables en x. Entonces se verifican las siguientes igualdades:*

1. $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

EJEMPLO 2. Calcular la derivada de la siguiente función. $f(x) = 3x^5$

Solución.
Utilizando la regla de derivación de una constante con la función se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^5)' \\ &= 3(x^5)' \\ &= (3)(5x^4) \\ &= 15x^4 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Calcular la derivada de la siguiente función. $f(x) = x^2 + 3x + 5$

Solución.
Utilizando la regla de derivación para la suma y la derivada elemental de potencias, se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 3x + 5)' \\ &= (x^2)' + (3x)' + (5)' \\ &= 2x + 3(x)' + 0 \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Calcular la derivada de la siguiente función. $f(x) = (x^2 + x)(2 - x^3)$

Solución.
Utilizando la de derivación para producto, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [(x^2 + x)(2 - x^3)]' \\
&= (x^2 + x)'(2 - x^3) + (x^2 + x)(2 - x^3)' \\
&= (2x + 1)(2 - x^3) + (x^2 + x)(-3x^2) \\
&= (2x + 1)(2 - x^3) - (x^2 + x)(3x^2) \\
&= 4x - 2x^4 + 2 - x^3 - 3x^4 - 3x^3 \\
&= -5x^4 - 4x^3 + 4x + 2
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5. Calcular la derivada de la siguiente función. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{2x + 1}$

Solución.
Utilizando la de derivación para la división y la suma se obtiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{x^2 + 3}{2x + 1}\right]' \\
&= \frac{(x^2 + 3)'(2x + 1) - (x^2 + 3)(2x + 1)'}{(2x + 1)^2} \\
&= \frac{(2x)(2x + 1) - (x^2 + 3)(2)}{(2x + 1)^2} \\
&= \frac{(4x^2 + 2x) - (2x^2 + 6)}{(2x + 1)^2} \\
&= \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 6}{(2x + 1)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2x - 6}{(2x + 1)^2}
\end{aligned}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

TEOREMA 3. ***Derivadas de funciones trigonométricas***

1. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
3. $(\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$
5. $(\sec x)' = \sec(x)\tan x$
6. $(\csc x)' = -\csc(x)\cot x$

EJEMPLO 6. Calcular la derivada de la siguiente función. $f(x) = 3\operatorname{sen} x$

Solución.
Utilizando la derivación de la función seno se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3\operatorname{sen} x)' \\ &= 3(\operatorname{sen} x)' \\ &= 3\cos x \end{aligned}$$

EJEMPLO 7. Calcular la derivada de la siguiente función. $f(x) = 2\cos x + x$

Solución.
Utilizando la derivación de suma se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\cos x + x)' \\ &= 2(\cos x)' + (x)' \\ &= 2(-\operatorname{sen} x) + 1 \\ &= -2\operatorname{sen} x + 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8. Determinar la derivada de la siguiente función. $f(x) = x - \tan x$

Solución.
Utilizando la derivación de resta se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - \tan x)' \\ &= (x)' - (\tan x)' \\ &= 1 - \sec^2 x \end{aligned}$$

EJEMPLO 9. Calcular la derivada de la siguiente función. $f(x) = x(\sec x)$

Solución.
Utilizando la derivación de producto se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x.\sec x)' \\ &= (x)'(\sec x) + x(\sec x)' \\ &= 1\sec x + x\sec x\tan x \\ &= (\sec x)(1 + x\tan x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 10. Encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.
$f(x) = (x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5); \quad c = 0$

Solución.
Utilizando la derivación de producto se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5)]' \\ &= (x^3 + 4x)'(3x^2 + 2x - 5) + (x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5)' \\ &= (3x^2 + 4)(3x^2 + 2x - 5) + (x^3 + 4x)(6x + 2); \quad \text{luego evaluamos } c = 0 \\ f'(0) &= [3(0)^2 + 4][3(0)^2 + 2(0) - 5] + [(0)^3 + 4(0)][6(0) + 2] \\ f'(0) &= (4)(-5) + (0)(2) \\ f'(0) &= -20 + 0 \\ f'(0) &= -20 \end{aligned}$$

EJEMPLO 11. Encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.
$f(x) = x\cos x; \quad c = \frac{\pi}{4}$

Solución.
Utilizando la derivación de producto se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\cos x)' \\ &= (x)'\cos x + x(\cos x)' \\ &= 1\cos x + x(-\operatorname{sen} x) \\ &= \cos x - x\operatorname{sen} x; \quad \text{luego evaluamos } c = \frac{\pi}{4} \\ f'(\frac{\pi}{4}) &= \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) \\ f'(\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'(\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

PROPIEDADES 1. Dadas las siguientes propiedades:

1. $(c)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
5. $(a^u)' = a^u u' lna$
6. $(e^u)' = e^u u'$
7. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' lnu$
8. $(uv)' = u'v + uv'$
9. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
10. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u} log_a e$
11. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
12. $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$
13. $(\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$
14. $(\tan u)' = u'\sec^2 u$
15. $(\cot u)' = -u'\cdot\csc^2 u$
16. $(\sec u)' = u'\cdot\sec u\tan u$

17. $(\csc u)' = -u' \cdot \csc u \cot u$

18. $(\operatorname{arcsen} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

19. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

20. $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

21. $(ku)' = ku'; \quad k = cte$

22. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

EJERCICIOS

1. Utilizar la regla del producto para derivar la función:
   - $f(x) = (x^2+5)(x^2-4x)$
   - $g(x) = x^3 \cos x$
   - $h(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$
2. Utilizar la regla del cociente para derivar la función:
   - $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
   - $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
   - $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+2}$
3. Encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.
   - $f(x) = (x^3+4x)(3x^2+2x-5); \qquad c = 0$
   - $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-3}; \qquad c = 1$
   - $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}; \qquad x = \dfrac{\pi}{6}$
4. Encontrar la derivada de la función trigonométrica:
   - $f(x) = \dfrac{3(1-\operatorname{sen} x)}{2\cos x}$
   - $g(x) = x^2 \tan x$
   - $h(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

6.2. Derivada implícita

Se denomina función explícita a aquella relación matemática en la que una variable queda determinada directamente a partir de otra. En este caso, la variable dependiente y se representa únicamente como una función de la variable independiente x, expresándose de la forma $y = f(x)$, por ejemplo $y = x^2 - 1$ es una función explícita.
En cambio se dice que una ecuación equivalente $2y - x^3 + 2 = 0$ define implícitamente la función o que y es una función **implícita**, por ejemplo $x^2 + y^2 = 4$ define implícitamente las dos funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ **En general**, Una ecuación implícita entre las variables x e y es una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

En numerosas situaciones, la variable y admite diferentes representaciones matemáticas equivalentes, pudiendo describirse mediante más de una función dependiente de x.
Si tales funciones resultan ser diferenciables, entonces se puede calcular $\dfrac{dy}{dx}$ directamente a partir de la ecuación implícita dada. Basta derivar (1) respecto a x y despejar $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación resultante.

EJEMPLO 12. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita y dada por la ecuación:

1. $x^3 + y^3 = 4$
   Solución:
   Derivamos con respecto a x
   $$(x^3 + y^3)' = (4)' \to 3x^2 + 3y^2.y' = 0 \to 3y^2.y' = -3x^2 \to y' = -\frac{x^2}{y^2} \to \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

2. $x^2 + y^2 = 4$
   Solución:
   Derivamos con respecto a x
   $$(x^2 + y^2)' = (4)' \to 2x + 2y.y' = 0 \to y' = -\frac{2x}{2y} \to \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

3. $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$
   Solución:
   Derivamos con respecto a x

$$\begin{aligned}
(x^4 + x^2y^3 - y^5)' &= (2x + 1)' \\
4x^3 + (2xy^3 + x^2 3y^2.y') - 5y^4.y' &= 2 \\
4x^3 + 2xy^3 + 3x^2y^2.y' - 5y^4.y' &= 2 \\
(3x^2y^2 - 5y^4)y' &= 2 - 4x^3 - 2xy^3 \\
y' &= \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{(3x^2y^2 - 5y^4)} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}
\end{aligned}$$

TEOREMA 4. *Una ecuación implícita se caracteriza por establecer una relación entre las variables x e y sin expresar de manera directa una variable en función de la otra, representándose mediante una expresión*

general de la forma:
$F(x,y)=0$ *entonces*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

EJEMPLO 13. Sea la ecuación: $y^2-2y=x$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$

Solución:
Aplicando el teorema, se tiene:
$F(x,y)=y^2-2y-x$, entonces $\dfrac{dF}{dx}=-1$ y $\dfrac{dF}{dy}=2y-2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}=-\frac{-1}{2y-2}=\frac{1}{2y-2}$$

6.3. Regla de la cadena

Como se anallizó anteriormente, la regla de potencia.

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

En este apartado se analizará una propiedad análoga aplicada al cálculo de la derivada de una función elevada a una potencia, expresada como $y=[g(x)]^n$. Previamente a la presentación formal de dicha regla, se estudiará un caso particular en el que el exponente n corresponde a un número entero positivo. Para ello, considérese la siguiente función que se desea derivar:

$$y=(x^5+3)^2 \qquad \ldots(1)$$

Al escribir (1) como $y=(x^5+3)(y^5+3)$, podemos encontrar la derivar al usar la regla de producto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5+3)^2 &= \frac{d}{dx}[(x^5+3)(x^5+3)]\\ &= \frac{d}{dx}(x^5+3)(x^5+3)+(x^5+3)\frac{d}{dx}(x^5+3)\\ &= (5x^4)(x^5+3)+(x^5+3)(5x^4)\\ &= 2(x^5+3)(5x^4) \qquad \ldots(2)\end{aligned}$$

En forma semejante, para diferenciar la función $y=(x^5+3)^3$, es posible escribirla como $y=(x^5+3)^2(x^5+3)$ y utilizando la propiedad correspondiente al producto junto con el resultado obtenido anteriormente (2):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5+3)^3 &= \frac{d}{dx}[(x^5+3)^2(x^5+3)]\\ &= \frac{d}{dx}[(x^5+3)^2](x^5+3)+[(x^5+3)^2]\frac{d}{dx}(x^5+3)\\ &= 2(x^5+3)(5x^4)(x^5+3)+(x^5+3)^2(5x^4)\\ &= 2(x^5+3)^2(5x^4)+(x^5+3)^2(5x^4)\\ &= 3(x^5+3)^2(5x^4) \qquad \ldots(3)\end{aligned}$$

Asimismo, al escribir $y = (x^5+3)^4$ como $y = (x^5+3)^3(x^5+3)$ es posible demostrar con facilidad mediante la regla del producto y (3) que

$$\frac{d}{dx}(x^5+3)^4 = 4(x^5+3)^3(5x^4) \qquad \ldots(4)$$

Regla de potencia para funciones El análisis de las expresiones (2), (3) y (4) permite identificar una regularidad en el proceso de derivación de una función elevada a una potencia. En particular, la ecuación (4) muestra el siguiente comportamiento:

$$4(x^5+3)^3(5x^4)$$

Para recalcar lo anterior, si la función diferenciable se denota por [ ], resulta evidente que

$$\frac{d}{dx}[\ ]^n = n[\ ]^{n-1}\frac{d}{dx}[\ ]$$

El análisis anterior sugiere el resultado que se plantea en el siguiente teorema

TEOREMA 5. ***Regla de potencia para funciones***
Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es diferenciable en x, entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}.\frac{d}{dx}[g(x)] \qquad \ldots(5)$$

o en forma equivalente,

$$\frac{d}{dx}[u]^n = n[u]^{n-1}.\frac{du}{dx} \qquad \ldots(6)$$

EJEMPLO 14. Regla de potencias para funciones
Calcular la derivada de la función. $y = (4x^3+2x+1)^5$

Solución.
Sea $u = g(x) = (4x^3+2x+1)^5$ por (6) se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = 5(4x^3+2x+1)^4.\frac{d}{dx}(4x^3+2x+1) = 5(4x^3+2x+1)^4(12x^2+2)$$

EJEMPLO 15. Regla de potencias para funciones
Calcular la derivada de la función. $y = 1/(x^3+1)^2$

Solución.
Sea $u = g(x) = 1/(x^3+1)^2 = (x^3+1)^{-2}$ por (6) se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = (-2)(x^3+1)^{-3}.\frac{d}{dx}(x^3+1) = (-2)(x^3+1)^{-3}(3x^2) = -6x^2(x^3+1)^{-3}$$

EJEMPLO 16. Regla de potencias para funciones
Calcular la derivada de la función. $y = (\operatorname{sen} x)^3$

Solución.
Sea $u = g(x) = (\operatorname{sen} x)^3$ por (6) se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = 3(\operatorname{sen} x)^2.\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 3(\operatorname{sen} x)^2.\cos x$$

Regla de la cadena Una expresión donde una función aparece elevada a una potencia puede interpretarse como la composición de dos funciones. Si se considera la función externa $f(x) = x^n$ y se define la función interna como $u = g(x)$, entonces la composición se representa mediante $f(u) = f(g(x)) = [g(x)]^n$. Para determinar la derivada de este tipo de expresiones, se emplea la regla de la cadena, la cual permite derivar funciones obtenidas a partir de la combinación de dos funciones diferenciables.

TEOREMA 6. *Regla de la cadena*
Si la función g admite derivada en x y la función f es derivable en el punto determinado por $u = g(x)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ también es diferenciable en x. y

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)).g'(x) \qquad \ldots(7)$$

o en forma equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \qquad \ldots(8)$$

TEOREMA 7. *Derivada de funciones trigonométricas*
Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces la composición $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u.\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u.\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u.\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u.\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u.\tan u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u.\cot u\frac{du}{dx}$$

EJEMPLO 17. Regla de la cadena
Calcular la derivada de la función. $y = \cos(5x)$

Solución.
la función es $\cos u$ con $u = 5x$. Por la segunda fórmula del teorema (2), la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(5x).\frac{d}{dx}(5x) = -5\operatorname{sen}(5x)$$

EJEMPLO 18. Regla de la cadena
Calcular la derivada de la función. $y = \tan(3x^2 + 1)$

Solución.
la función es $\tan u$ con $u = 3x^2 + 1$. Por la fórmula del teorema (2), la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = -\sec^2(3x^2 + 1).\frac{d}{dx}(3x^2 + 1) = 6x\sec^2(3x^2 + 1)$$

EJEMPLO 19. Regla de la cadena
Hallar la derivada de la función $f(x) = (3x^2 + 2x + 4)^5$

Solución.
Sea $y = f(x)$, luego podemos escribir: $y = u^5$, donde $u = 3x^2 + 2x + 4$
$\frac{dy}{du} = 5u^4$ y $\frac{du}{dx} = 6x + 2$, como $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$
Entonces: $\frac{dy}{dx} = 5u^4(6x + 2) = 5(3x^2 + 2x + 4)^4(6x + 2)$

6.4. Derivación paramétrica

Derivada de una función definida en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Con la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

o también

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ejemplo 20. Dada la siguiente función definida por las ecuaciones paramétricas $x = t - t^2$ y $y = t - t^3$, determinar su derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución: Primero se deriva las variables x e y con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

Ejemplo 21. Dada la siguiente función definida por las ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$, determinar su derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución: Primero se deriva las variables x e y con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \to \frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$$

6.5. Derivadas de orden superior

La función $f'(x)$ corresponde a la primera derivada asociada a $y = f(x)$. Al derivar esta expresión una vez más, se obtiene una nueva función matemática identificada como **segunda derivada**, que se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de operación d/dx, la segunda derivada con respecto a x la definimos como la función que se obtiene al diferenciar dos veces consecutivas a $y = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

La representación de la segunda derivada se realiza comúnmente mediante las siguientes notaciones:

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad D^2, \quad D_x^2$$

EJEMPLO 22. Determinar la segunda derivada de la función dada: $y = x^8 + 2x^6 - 7x + 15$

Solución:

$y' = 8x^7 + 12x^5 - 7 \quad \rightarrow \quad y'' = 56x^6 + 60x^4$

La derivada de Orden superior se puede definir derivada de cualquier orden entero positivo. por ejemplo la segunda derivada es derivada de la primera derivada, la tercera derivada es derivada de la segunda derivada. Las derivadas de orden superior se denotan como se muestran a continuación.

Primera derivada	$y', f'(x)$
Segunda derivada	$y'', f''(x)$
Tercera derivada	$y''', f'''(x)$
$\vdots$	
n-ésima derivada	$y^{(n)}, f^{(n)}(x)$

EJEMPLO 23. Hallar la segunda derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $y = cos^2 x$
   Solución:
   $y' = -2\cos x.\operatorname{sen} x \quad \rightarrow y'' = -2[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x] = -2\cos(2x)$

2. $y = \dfrac{1}{x+1}$
   Solución:
   $y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \quad \rightarrow y'' = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$

3. $y = \ln x$
   Solución:
   $y' = \dfrac{1}{x} \quad \rightarrow y'' = -\dfrac{1}{x^2}$

EJEMPLO 24. Calcular la tercera derivada de la siguiente función. $y = 3x^5 + 2$

Solución.

$$y' = 15x^4 \quad \rightarrow y'' = 60x^3 \rightarrow y''' = 180x^2.$$

EJERCICIOS

1. Suponga que la ecuación dada define por lo menos una función diferenciables implícita. Use diferenciación implícita para encontrar $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

   - $3y + \cos y = x^2$
   - $y^2 = \dfrac{x-1}{x+2}$
   - $xy = \operatorname{sen}(x+y)$

2. Utilizar una de las reglas para derivar las siguientes funciones:

   - $f(x) = \operatorname{sen}(2x).\cos(3x)$
   - $f(x) = \tan(\frac{1}{x})$

- $f(x) = (2 + x\,\text{sen}(2x))^{10}$

3. Encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$.

- $f(x) = sen(x^3)$
- $f(x) = 2\cos x.senx$
- $f(x) = e^{\cos x}$

4. Dada la siguiente función definida por las ecuaciones paramétricas, determinar su derivada $\frac{dy}{dx}$.:

- $x(t) = \text{sen}(2t)$ y $y(t) = \cos(3t)$
- $x(t) = \cos(t) + \text{sen}(t)$ y $y(t) = \text{sen}^2(t)$

6.6. Movimiento rectilíneo

El movimiento de un objeto en una línea recta, horizontal o vertical, es un **movimiento rectilíneo**. Una función $s = s(t)$ que proporciona la coordenada del objeto sobre una recta horizontal o vertical se denomina **función posición**. La variable t representa el tiempo y el valor de la función $s(t)$ representa una distancia dirigida, que se mide en centímetros, metros, pies, millas, etc., a partir de un punto de referencia $s = 0$ sobre la recta. Recuerde que sobre una escala horizontal, consideramos la dirección s positiva a la derecha de $s = 0$, y sobre una escala vertical, la dirección s positiva la consideramos hacia arriba.

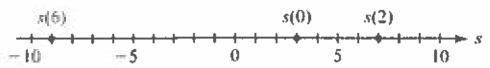
EJEMPLO 25. Posición de una partícula en movimiento
Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a 0, 2 y 6 segundos?

Solución:
Al sustituir en la función posición obtenemos

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad s(6) = -9$$

Como se muestra en la Figura (1), $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula está a la izquierda del punto de referencia

Figura 1: Posición de una partícula en varios instantes



Fuente:Zill (2011)

6.6.1. Velocidad y aceleración

Si la velocidad media de un cuerpo en movimiento sobre un intervalo de tiempo de longitud es Δt

$$\frac{\text{cambio de posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Por consiguiente, la velocidad del cuerpo, entendida como la razón de cambio en un instante determinado, se expresa mediante:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Así tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1. ***Función velocidad***
Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su función velocidad $v(t)$ en el instante t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

La rapidez del objeto en el t es $|v(t)|$

La velocidad puede expresarse mediante diversas unidades, dependiendo del sistema de medida empleado, entre las que destacan centímetros por segundo (cm/s), metros por segundo (m/s), pies por segundo $(pies/s)$, kilómetros por hora (km/h) y millas por hora (mi/h), entre otras. Asimismo, resulta posible analizar la variación de la velocidad a través del estudio de su razón de cambio.

DEFINICIÓN 2. ***Función aceleración***
Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su función aceleración $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Las unidades típicas para medir la aceleración son metros por segundo por segundo (m/s^2), pies por segundo por segundo $(pies/s^2)$, millas por hora por hora (mi/h^2). A menudo, las unidades de la aceleración se leen literalmente "metros por segundo al cuadrado".

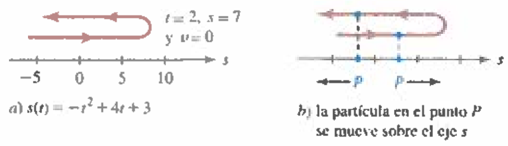
EJEMPLO 26. Del ejercicio 1
Consiére la función $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, que representa la posición de una partícula en centímetros en función del tiempo medido en segundos. Determinar la velocidad y la aceleración correspondiente:

Solución:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4, \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2$$

En los instantes0, 2 y $6s$, las velocidades son $v(0) = 4$ cm/s, $v(2) = 0$ cm/s y $v(6) = -8$ cm/s, dado que la aceleración mantiene signo negativo, la velocidad disminuye progresivamente con el transcurso del tiempo. Observe que para $v(t) = 2(-t + 2) > 0$ para $t < 2$ y $v(t) = 2(-t + 2) < 0$ para $t > 2$. Si se deja que el tiempo t sea negativo y también positivo, entonces la partícula se mueve hacia la derecha para el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y presenta un desplazamiento hacia la izquierda durante el intervalo de tiempo $(2, \infty)$. El movimiento puede representarse por la gráfica que se muestra en la Figura 2 a). Puesto que el movimiento en realidad se lleva a cabo sobre la recta horizontal, usted debe imaginar el movimiento de un punto P que corresponde a la proyección de un punto en la gráfica sobre la recta horizontal. Vea la Figura 2 b).

Figura 2: Representación del movimiento de la partícula



Fuente:Zill (2011)

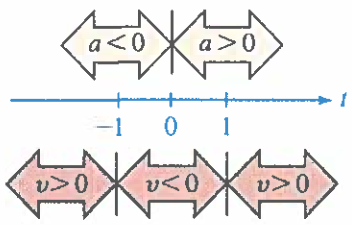
Ejemplo 27. Partícula que desacelera/acelera
El movimiento de una partícula sobre una trayectoria rectilínea horizontal está descrito por la función de posición $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales acelera.

Solución:
Los signos algebraicos de las funciones velocidad y aceleración

$$v(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \quad y \quad a(t) = 2t$$

Se muestran sobre la escala de tiempo en la Figura 3. Puesto que $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos opuestos sobre $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, la partícula desacelera sobre estos intervalos de tiempo; dado que $v(t)$ y $a(t)$ mantienen el mismo signo en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, la partícula incrementa su movimiento en dichos periodos de tiempo.

Figura 3: Signos de $v(t)$ y $a(t)$



Fuente:Zill (2011)

6.7. Extremos de funciones

Definición 3. ***Extremos absolutos***

1. *Un número $f(c_1)$ es un máximo absoluto de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para todo x en el dominio de f.*

2. *Un número $f(c_1)$ es un mínimo absoluto de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para todo x en el dominio de f.*

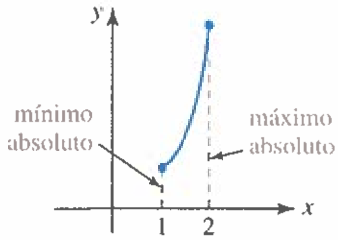
Los extremos absolutos, conocidos igualmente como extremos globales, corresponden a los puntos en los que una función obtiene su valor máximo o mínimo dentro de todo el conjunto de valores considerados.

El análisis gráfico permite reconocer, en muchas situaciones, la presencia de estos extremos al observar el comportamiento general de la función. En general, una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto.
Por ejemplo la función $f(x) = 4 - x^2$ tiene el máximo absoluto $f(0) = 4$.

EJEMPLO 28. $f(x) = x^2$, definida sobre el intervalo cerrado $[1, 2]$

Como se muestra en Figura, se observa que tiene un máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(1) = 1$

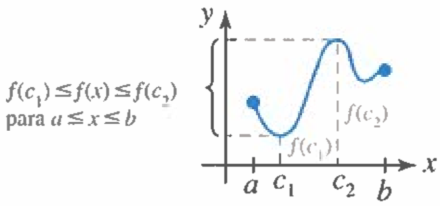
Figura 4: Máximo y Mínimos



Fuente:Zill (2011)

TEOREMA 8. ***Teorema del valor extremo***
Una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre el intervalo.

Figura 5: La función f tiene un Máximo y Mínimos absoluto



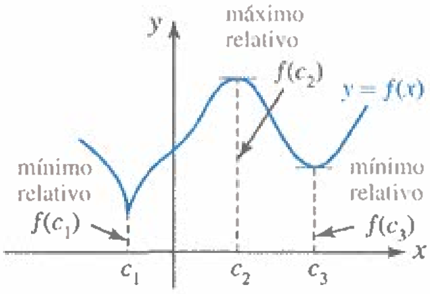
Fuente:Zill (2011)

DEFINICIÓN 4. ***Extremos Relativos***

1. *Un número $f(c_1)$ es un máximo relativo de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c_1.*

2. *Un número $f(c_1)$ es un mínimo relativo de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c_1.*

Figura 6: Máximo y Mínimos relativos



Fuente:Zill (2011)

DEFINICIÓN 5. ***Número crítico***
Se denomina número crítico de una función f a todo valor c perteneciente a su dominio en el que la derivada se anula o no está definida. Es decir, ocurre cuando $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

EJEMPLO 29. Determinar los números críticos de las siguiente función.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 + 13$$

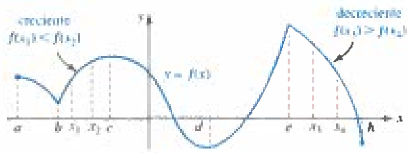
Solución:
Derivando la función

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 + 13 \\
f'(x) &= x^3 - 7x^2 + 12x \\
f'(x) &= x(x^2 - 7x + 12) \\
&= x(x-3)(x-4) \to f'(x) = 0 \\
x(x-3)(x-4) &= 0 \leftrightarrow x = 0; x - 3 =; x - 4 = 0 \\
\text{los números críticos} &\quad \text{son} \quad x = 0; x = 3; x = 4
\end{aligned}$$

TEOREMA 9. *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b).*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente sobre $[a, b]$.*
2. *Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente sobre $[a, b]$.*

Figura 7: Una función puede crecer sobre algunos intervalos y decrecer en otros



Fuente:Zill (2011)

Ejemplo 30. Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ es creciente y los intervalos sobre los cuales f es decreciente.

Solución:
La derivada es

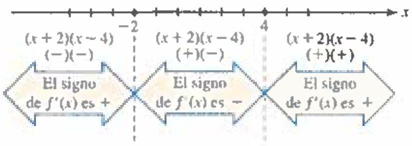
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

Para determinar cuándo $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ es necesario resolver

$$(x+2)(x-4) > 0 \quad y \quad (x+2)(x-4) < 0$$

respectivamente. Una manera de resolver estas desigualdades es analizar los signos algebraicos de los factores $(x+2)$ y $(x-4)$ sobre los intervalos de la recta numérica determinada por los puntos críticos -2 y 4: $(-\infty, -2]$, $[-2, 4]$, $[4, \infty)$. Ver la Figura

Figura 8: Signos de $f(x)$ en tres intervalos



Fuente:Zill (2011)

La información obtenida a partir de la figura se resume en la tabla siguiente.

Intervalo	signo de $f'(x)$	$y = f(x)$
$(-\infty, -2)$	+	creciente sobre $(-\infty, -2]$
$(-2, 4)$	-	decreciente sobre $[-2, 4]$
$(4, \infty)$	+	creciente sobre $[4, \infty)$

EJERCICIOS

1. $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes indicados..
   - $s(t) = 4t^2 - 6t + 1; \quad t = 1/2, t = 3$
   - $s(t) = t^4 - t^3 + t; \quad t = -1, t = 3$
2. use la gráfica de la función dada como ayuda para determinar cualquier extremo absoluto sobre los intervalos indicados.
   - $f(x) = x^2 - 4x$; $[1, 4]$ y $(4, 5]$
   - $f(x) = x - 4$; $[-1, 2]$ y $[3, 7]$
3. Determinar los números críticos correspondientes a las funciones dadas.
   - $f(x) = (x-2)^2(x-1)$

- $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

4. Analice la función f para determinar los intervalos en los que su comportamiento es creciente o decreciente.

- $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{7x^3}{3} + 6x^2 + 13$
- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$

6.8. Relación entre la rapidez de variación de variables relacionadas

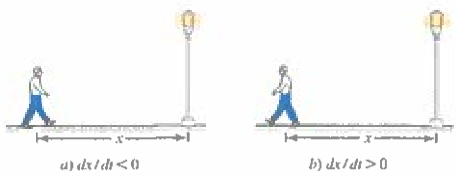
En este apartado se estudiarán las razones de cambio relacionadas. La derivada dy/dx asociada a una función $y = f(x)$ representa la variación instantanea de y respecto a la variable x. En la sección precedente vimos que cuando una función $s = s(t)$ describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo ds/dt se interpreta como la velocidad del objeto. En general, una razón de cambio con el tiempo es la respuesta a la pregunta: ¿cuán rápido cambia la cantidad? Por ejemplo, si V representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces dV/dt es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo t. Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5pies^3/s$ significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la Figura (9).

Figura 9: A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo

Fuente:Zill (2011)

En forma semejante, si una persona camina hacia el poste mostrado en la Figura (2) a razón constante de $3pies/s$, entonces sabemos que $dx/dt = -3pies/s$. Por otra parte, si la persona se aleja del poste, entonces $dx/dt = 3pies/s$. Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia x de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

Figura 10: x creciente en a); x decreciente en b)



Fuente:Zill (2011)

Regla de potencias de funciones. Recordemos la regla de potencia para funciones obtenemos:

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\cdot\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

donde n es un número real. por supuesto, (2) es aplicable a cualquier función; por ejemplo r, x o z, que dependa de la variable t:

$$\frac{d}{dt}r^n = nr^{n-1}\cdot\frac{dr}{dt};\qquad \frac{d}{dt}x^n = nx^{n-1}\cdot\frac{dx}{dt};\qquad \frac{d}{dt}z^n = nz^{n-1}\cdot\frac{dz}{dt} \tag{3}$$

EJEMPLO 31. Use 2
Un globo esférico se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón a que aumenta el volumen con la razón a la que aumenta el radio?

Solución:
En el instante t, el volumen V de una esfera es una función del radio r; es decir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Por tanto, obtenemos las razones relacionadas a partir de la derivada con respecto al tiempo de esta función. Con ayuda del primer resultado en (2), vemos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{d}{dt}r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2\frac{dr}{dt})$$

es lo mismo que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

EJEMPLO 32. Un globo esférico se infla con aire a razón de $20pies^3/min$. ¿A qué razón cambia el radio cuando éste es de 3 pies?

Solución:
Como se muestra en la figura (1), denotamos el radio del globo con r y su volumen con V. Ahora, las interpretaciones de "Un globo esférico se infla ... a razón de $20pies^3/min$" y "¿A qué razón cambia el radio cuando es de 3 pies?" son, respectivamente, la razón que tenemos

$$\textbf{Dato}: \frac{dV}{dt} = 20pies^3/min$$

y la razón que se busca

$$\textbf{Encontrar}: \frac{dr}{dt}|_{r=3}$$

Debido a que el ejemplo 1 ya sabemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

es posible sustituir la razón constante $dV/dt = 20$; es decir, $20 = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$. Al despejar dr/dt en la última ecuación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}$$

Por lo tanto $\frac{dr}{dt}|_{r=3} = \frac{5}{9\pi}pies/min \approx 0{,}18pies/min$

EJEMPLO 33. Use del teorema de pitágoras
Una mujer que corre a razón constante de $10km/h$ cruza un punto P en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de $9km/h$ cruza por el mismo punto P en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto P?

Solución:

Sea el tiempo t dado en horas desde el instante en que el hombre cruza el punto P. Como se muestra en la Figura (11), a $t > 0$ sean el hombre H y la mujer M que están en x y y km, respectivamente, a partir del punto P. Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores. Así, dos razones son

$$\textbf{Dato}: \frac{dx}{dt} = 9km/h, \qquad \frac{dx}{dt} = 10Km/h \tag{4}$$

y se busca

$$\textbf{Encontrar}: \frac{dz}{dt}|_{t=1/3}$$

En la figura 11 vemos que el triángulo HPM es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de pitágoras, las variables x, y y z están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{5}$$

Al derivar (5) con respecto a t,

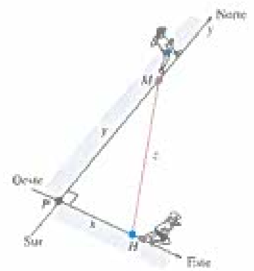
$$\frac{d}{dt}z^2 = \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2, \quad \text{proporciona} \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \tag{6}$$

Al sustituir las dos razones indicadas en (4) y emplear la última expresión de (6), se obtiene el siguiente resultado:

$$z\frac{dz}{dt} = 9x + 10y$$

Cuando $t = \frac{1}{3}h$ usamos distancia = razón x tiempo para obtener la distancia que ha corrido el hombre:$x = 9(\frac{1}{3}) = 3$km. Debido a que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}h(10)$min más, la distancia que ella ha recorrido es $y = 10(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = 5$km. En $t = \frac{1}{3}h$, se concluye que $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$km. Por último, $\sqrt{34}\frac{dz}{dt}|_{t=1/3} = 9(3) + 10(5)$ o bien $\frac{dz}{dt}|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13{,}21km/h$

Figura 11: corredores



Fuente:Zill (2011)

EJEMPLO 34. Uso de trigonometría

Un faro está situado en una isla pequeña a 2 mi de la costa. La baliza del faro gira a razón constante de 6 grados/s. ¿Cuán rápido se mueve el haz del faro a lo largo de la costa en un punto a 3 mi del punto sobre la costa que es el más próximo al faro?

Solución:

Inicialmente, se definen las variables θ y x tal como se ilustra en la Figura 12. Además, se cambia la información sobre θ a radianes al utolizando la relación de 1 grado es equivalente a $\pi/180$ radianes.Así,

$$\textbf{Dado:}\frac{d\theta}{dt} = 6\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30}rad/s \qquad \textbf{Encontrar:}\frac{dx}{dt}|_{x=3}$$

A partir de la trigonometría de un triángulo rectángulo, por la figura vemos que

$$\frac{x}{2} = \tan\theta \quad \text{o bien} \quad x = 2\tan\theta$$

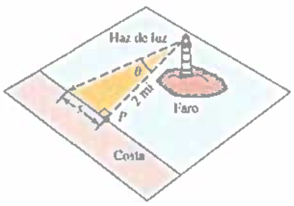
Al diferenciar la última ecuación con respecto a t y usar la razón dada obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{15}\sec^2\theta \quad \leftarrow \text{regla de la cadena} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

En el instante en que $x = 3$, $\tan\theta = \frac{3}{2}$, de modo que por la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec^2\theta = \frac{13}{4}$. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt}|_{x=3} = \frac{\pi}{15}\frac{13}{4} = \frac{13\pi}{60}mi/s$$

Figura 12: Faro

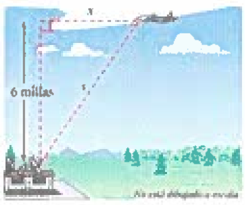


Fuente:Zill (2011)

EJERCICIOS

1. Un avión sigue una trayectoria que lo conducirá a pasar directamente sobre una estación de radar, según se ilustra en la figura. Si la distancia s disminuye a una razón de 400 millas por hora cuando $s = 10$ millas, determine la velocidad a la que se desplaza el avión.

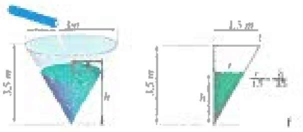
Figura 13: Un avión vuela a 6 millas de altura y dista s millas de la estación de radar



Fuente:Larson (2010)

2. Un recipiente cónico (con el vértice hacia abajo) tiene 3 metros de ancho arriba y 3.5 metros de hondo. Si el agua fluye hacia el recipiente a razón de 3 metros cúbicos por minuto, encuentre la razón de cambio de la altura del agua cuando tal altura es de 2 metros.

Figura 14: gráfica



Fuente:Hernández (2016)

3. Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación θ de la cámara que se muestra en la figura, diez segundos después del despegue.

Figura 15: Gráfica

Fuente:Larson (2010)

4. La altura de un triángulo disminuye a razón de 2cm/min mientras que el área del mismo disminuye a razón de $3cm^2/min$. ¿A qué ritmo cambia la base del triángulo cuando la altura es igual a $20cm$ y el área es de $150cm^2$?

7. Glosario

- **Derivada**: Concepto matemático que describe la rapidez con que una cantidad cambia respecto a otra. Permite analizar variaciones instantáneas en fenómenos físicos, económicos y científicos.
- **Razón de cambio**: Relación que expresa cuánto aumenta o disminuye una variable con respecto a otra. Constituye la base conceptual del estudio de derivadas.
- **Límite**: Herramienta analítica utilizada para estudiar la tendencia de una función cuando los valores de la variable se aproximan progresivamente a un punto determinado.

- **Función**: Expresión matemática que establece una correspondencia entre una variable de entrada y un valor de salida.
- **Variable independiente**: Magnitud cuyo valor puede modificarse libremente y que influye sobre otra variable.
- **Variable dependiente**: Cantidad cuyo comportamiento está condicionado por los cambios de otra variable.
- **Pendiente de la recta tangente**: Medida de inclinación de una línea que toca una curva en un punto específico. Su valor corresponde a la derivada en dicho punto.
- **Tasa de cambio instantánea**: Velocidad exacta con la que una variable cambia en un momento particular.
- **Incremento**: Variación experimentada por una cantidad al pasar de un valor inicial a otro diferente.
- **Diferencial**: Cambio infinitesimal asociado a una variable que facilita aproximaciones y análisis matemáticos.
- **Derivada primera**: Indica el comportamiento inicial de una función y permite determinar crecimiento o decrecimiento.
- **Derivada segunda**: Permite estudiar cambios en la pendiente y analizar la concavidad de una función.
- **Concavidad**: Propiedad geométrica que describe la curvatura de una función y la forma que adopta su gráfica.
- **Punto crítico**: Valor donde la derivada es cero o no existe, utilizado para identificar posibles máximos o mínimos.
- **Máximo local**: Valor relativamente mayor que los puntos cercanos dentro de un intervalo específico.
- **Mínimo local**: Valor relativamente menor respecto a los valores próximos de una función.
- **Punto de inflexión**: Lugar donde una función cambia su tipo de concavidad.
- **Optimización**: Proceso matemático orientado a encontrar el mejor valor posible bajo determinadas condiciones.
- **Regla de la potencia**: Procedimiento utilizado para derivar expresiones algebraicas con exponentes.
- **Regla del producto**: Método empleado para derivar la multiplicación de dos funciones.
- **Regla del cociente**: Técnica aplicada para derivar funciones expresadas como divisiones.
- **Regla de la cadena**: Procedimiento para derivar funciones compuestas mediante el análisis de funciones internas y externas.
- **Derivación implícita**: Método utilizado cuando una función no está despejada explícitamente.
- **Velocidad instantánea**: Aplicación de la derivada que determina el cambio de posición de un objeto respecto al tiempo.
- **Aceleración**: Razón de cambio de la velocidad con relación al tiempo.

8. Referencia Bibliográfica

1. Figueroa Roberto,(2004). Matemática Básica.Lima: Editorial San Marcos.
2. Hernández, E. (2016). Cálculo Diferencial e Integral con Aplicaciones. Costa Rica: Revista digital matemática, Educación e Internet.
3. Kong, M. (2001). Cálculo Diferencial. Lima: Pontificia Universidad Católica.
4. Larson, R. y Edwards, B. (2010). Cálculo 1 de una variable. México: McGraw-Hill/Interamericana editores, S.A. de C.V.
5. Larson, R. y Edwards, B. (2010). Cálculo 2 de varias variables. México: McGraw-Hill/Interamericana editores, S.A. de C.V.
6. Orrianta, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. Revista Psicopedagogia, 158-180.
7. Purcell, E; Varberg, D; Rigdon, S. (2007). Cálculo . Pearson Educación.
8. Salina, B. y Cotillas, C. (2007). La evaluación de los estudiantes en la Educación Superior: Apuntes de buenas prácticas. Servei de Formación Permanent.
9. Stewart, J. (2010). Cálculo de una variable Trascendentes temprana. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V
10. Vrancken, S, y Engler, A. (2014). Una introducción a la Derivada desde la variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. Boletín de Educación Matemática, 449-4466.
11. Zill, D. y Dewar,J.(2012) Álgebra,trigonometría y geometría analítica.México: McGraw-Hill/Interamericana editores, S.A.de C.V.
12. Zill, D. y Wright, W.(2011) cálculo trascendentes tempranas. México: McGraw-Hill/Interamericana editores, S.A.de C.V.
13. Zill, D. y Wright, W.(2011) cálculo de varias variables. México: McGraw-Hill/Interamericana editores, S.A.de C.V.